ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS 112 (1999), 135–155

LA SINGULARITÉ MUTUELLE PRESQUE SÛRE DU SPECTRE DES TRANSFORMATIONS D'ORNSTEIN

PAR

EL HOUCEIN EL ABDALAOUI

Analyse et Modèles Stochastiques, Université de Rouen
UFR des sciences- CNRS UPRES-A 6085, Mathématiques, Site Colbert
F 76821 Mont Saint Aignan Cedex, France
e-mail: elabdal@univ-rouen.fr

ABSTRACT

It is shown that, almost surely with respect to the product measure, the maximal spectral type of Ornstein's transformations are mutually singular so that these transformations are mutually disjoint in Furstenberg's sense.

1. Introduction

Dans [O] D. S. Ornstein introduit une classe de transformations de rang un selon un certain procédé aléatoire et montre que presque sûrement ces transformations sont mélangeantes; ensuite D. Rudolph [Ru] adapte la procédure d'Ornstein afin d'obtenir des exemples de transformations ayant la propriété d'autocouplages minimaux (M.S.J). Vient alors J. King [K] qui montre que tout rang mélangeant a la propriété M.S.J., donc presque sûrement les transformations d'Ornstein ont la propriété d'autocouplages minimaux. Mais, de manière générale D. Rudolph & A. Del Junco [D-Ru] montrent que deux transformations simples qui n'ont pas de facteurs isomorphes sont disjointes au sens de Furstenberg, en particulier, si les deux transformations ont la propriété d'autocouplages minimaux, alors, elles sont disjointes si elles ne sont pas isomorphes car la propriété d'autocouplages

Received July 30, 1997 and in revised form April 6, 1998

minimaux entraîne la primalité [Ru2, p. 117]. Il est alors naturel de se poser la question suivante :

> Les transformations d'Ornstein sont-elles presque sûrement mutuellement disjointes au sens de Furstenberg?

Bien que cette question semble inaccessible par les méthodes du codage [Th-p], la voie spectrale est restée inexplorée. En effet, le spectre de ces transformations est resté méconnu jusqu'à ce que J. Bourgain montre dans [B] que presque sûrement ces transformations sont singulières. En s'inspirant très largement des techniques de J. Bourgain introduites dans [B] et développées par I. Klemes dans [Kl] et I. Klemes & K. Reinhold dans [Kl-Re], et en les généralisant on répond affirmativement à cette question. En fait, on montre que presque sûrement les types spectraux de ces transformations sont mutuellement singuliers. Intervient alors le problème sous-jacent de la masse en zéro qui présente dans ce travail une sérieuse difficulté.

Il va sans dire que ce travail s'inspire aussi de la littérature abondante sur les produits de Riesz classiques qu'on rencontre dans l'analyse harmonique, en particulier les travaux de J. Peyrière [P] , G. Ritter [Ri], F. Parreau [Pa], G. Brown & W. Moran [B-M] et de S. J. Kilmer & S. Saeki [Kl-Sa]. De plus le résultat précédent est valable pour les types spectraux des transformations particulières d'Ornstein construites dans l'article de A. H. Dooley & S. J. Eigen [D-E] bien que la question du faible mélange de ces transformations reste ouverte.

1.1 Construction d'un rang un.

En utilisant la méthode de découpage et empilement développée dans [Fr1] & [Fr2], on définit un système dynamique de rang un de manière constructive comme suit.

Soit $B_0 = [0,1)$ muni de la mesure de Lebesgue ν .

Au stade 1: on découpe B_0 en p_0 intervalles de même longueur, et on place sur le $i^{ème}$ intervalle $a_i^{(0)}$ intervalles de même longueur puis on les empile l'un après l'autre en partant de la gauche vers la droite. À ce stade T envoie d'une manière affine le niveau i sur le niveau $(i+1)$, et T n'est pas défini sur le niveau $h_1 = p_0 + \sum_{i=1}^{p_0} a_i^{(0)}$. Ainsi, on vient de construire une tour de hauteur h_1.

Au stade k: supposons le $(k-1)^{ième}$ stade réalisé; ainsi, on dispose de la $(k-1)^{ième}$ tour de base B_{k-1}. On découpe cette tour en p_{k-1} sous-colonnes de même longueur et on place sur la $i^{ième}$ sous-colonne $a_i^{(k-1)}$ intervalles de la même longueur puis on empile en partant de la gauche vers la droite. À ce stade T envoie d'une manière affine le niveau i sur le niveau $(i+1)$, et T n'est pas défini sur le niveau $p_{k-1}h_{k-1} + \sum_{i=1}^{p_{k-1}} a_i^{(k-1)}$. Ainsi, la $k^{ième}$ tour obtenue a pour hauteur

$$h_k = p_{k-1}h_{k-1} + \sum_{i=1}^{p_{k-1}} a_i^{(k-1)} \quad \text{avec } 0 \leq a_i^{(k-1)} < \infty, \quad 1 \leq i \leq p_{k-1}.$$

Ce qui revient, en utilisant une définition symbolique, à définir T par:

$$B_{k+1} = \underbrace{B_k \underbrace{sss\cdots s}_{a_1^{(k)}} B_k \underbrace{ss\cdots s}_{a_2^{(k)}} B_k \underbrace{s\cdots s}_{a_3^{(k)}} \cdots B_k \underbrace{sss\cdots s}_{a_{p_k}^{(k)}}}_{p_k \text{ fois}}$$

où B_k est le $k^{ième}$ bloc et s est le séparateur.

Selon ce procédé on vient de construire un système dynamique $(X,\mathcal{A},\nu,T)$, qui peut être fini ou σ-fini selon la quantité des séparateurs utilisée et dont la construction est entièrement déterminée par la donnée de deux paramètres: le paramètre de découpage $(p_k)_{k=0}^{\infty}$, et le paramètre d'empilement $((a_i^{(k-1)})_{i=1}^{p_k})_{k=0}^{\infty}$.

Dans [C-N] il est montré que le type spectral d'une telle transformation est donné modulo quelques atomes par:

$$\sigma \quad = \quad \omega^* \lim \prod_{k=1}^{k=n} |P_k|^2 \, d\lambda \quad \text{où } P_k = \frac{1}{\sqrt{p_k}} \left(\sum_{j=0}^{p_k-1} z^{-(jh_k + \sum_{i=1}^{j} a_i^{(k)})} \right)$$

et λ est la mesure de Lebesgue sur le tore $\mathbb{T}$.

L'égalité étant au sens de la convergence faible des mesures sur le tore.

Les polynômes P_k apparaissent d'une manière naturelle comme conséquence de la relation récursive qui existe entre les bases B_k, en effet

$$B_k = B_{k+1} \cup T^{h_k + s_k(1)} B_{k+1} \cup \cdots \cup T^{(p_k-1)h_k + s_k(p_k-1)} B_{k+1},$$

$$\nu(B_k) = p_k \nu(B_{k+1}),$$

où $s_k(n) = a_1^{(k)} + \cdots + a_n^{(k)}$ et $s_k(0) = 0$.

En posant

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{\nu(B_k)}} 1_{B_k},$$

on obtient

$$f_k = \; P_k(U_T) f_{k+1}, \quad \text{où } U_T \text{ est l'opérateur associé à } T.$$

En réitérant cette relation on obtient

$$d\sigma_k = |P_k|^2 \, d\sigma_{k+1} = \cdots = \prod_{j=0}^{m-1} |P_{k+j}|^2 \, d\sigma_{k+m},$$

où σ_k est la mesure spectrale de f_k.

1.2 CONSTRUCTION DES TRANSFORMATIONS D'ORNSTEIN.

Dans [O] le choix des séparateurs est fait d'une manière aléatoire; en clair, on choisit d'une manière uniforme et indépendante les $(x_{k,i})_{i=1}^{i=p_k-1}$ dans

$$X_k = \left\{-\frac{h_{k-1}}{2}, \ldots, \frac{h_{k-1}}{2}\right\}$$

et on pose

$$a_i^{(k)} = h_{k-1} + x_{k,i} - x_{k,i-1}, \quad \text{et} \quad x_{k,0} = 0.$$

Un calcul immédiat permet de conclure que

$$h_{k+1} = p_k(h_k + h_{k-1}) + x_{k,p_k}$$

et donc la suite (h_k) est entièrement déterminée par les deux suites déterministes d'entiers positifs (p_k) et (x_{k,p_k}).

On impose de plus comme dans [O] que le nombre x_{k,p_k} qui correspond à la dernière colonne soit choisi entre 1 et 4 afin d'assurer la totale ergodicité ; ainsi la suite (x_{k,p_k}) est une suite déterministe qui vérifie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_{k,p_k}}{h_k} < +\infty.$$

On déduit de ce qui précède que l'espace de probabilité des transformations d'Ornstein est donné par $\Omega = \prod_{l=1}^{\infty} X_l^{p_l-1}$, muni de la probabilité $\bigotimes_{l=1}^{\infty} Q_l$, où $Q_l = \bigotimes_1^{p_l-1} \mathcal{U}_l$; $\mathcal{U}_l$ est la loi uniforme sur X_l.

Chaque point $\omega = \left(\omega_k = (x_{k,i})_{i=1}^{p_k-1}\right)_{k\geq 1}$ dans Ω définit les séparateurs et par suite donne naissance à une transformation T_ω et si on se restreint à $\Omega' = \{\omega : T_\omega$ mélangeante $\}$, le type spectral de T_ω est alors donné par:

$$\sigma_{T_\omega} = \sigma_{1_{B_0}} = \sigma = \mu_\omega + \frac{1}{c}\delta_1 = \omega^* \lim \prod_{l=1}^{N} \frac{1}{p_l} \left| \sum_{p=0}^{p_l-1} z^{p(h_l+h_{l-1})+x_{l,p}} \right|^2 d\lambda$$

où ω^* lim désigne la limite faible, μ_ω est le type spectral réduit de T_ω et $\sqrt{c}$ est la masse totale du système dynamique qui ne dépend pas de ω.

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera dans la suite σ et σ' les types spectraux associés respectivement à T_ω et $T_{\omega'}$, où ω et ω' sont deux points de Ω, μ et μ' leurs types spectraux réduits.

Le but de ce travail est de montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1: *Pour $\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}$ - presque tout $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$ les transformations d'Ornstein T_ω et $T_{\omega'}$ sont disjointes au sens de Furstenberg, i.e. leur seul couplage possible est la mesure produit.*

En fait on montre le résultat suivant.

THÉORÈME 1.2: *Pour $\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}$ - presque tout $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$ les types spectraux réduits des transformations d'Ornstein sont mutuellement singuliers, i.e.*

$$\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}\{(\omega, \omega') \colon \mu_\omega \perp \mu_{\omega'}\} = 1.$$

Preuve du théorème 1: Par exemple par le lemme de [Th] et le théorème 2 on obtient le théorème 1. ∎

Le reste de ce travail est consacré à la preuve du théorème 2 .

Dans la section 1 on donne un certain nombre de critères de singularité et de non-singularité mutuelle des types spectraux des rang un.

Dans la section 3 on réduit le problème à une majoration (Proposition 3.6) qui est montrée dans la section 4. Les résultats de ces sections permettent d'obtenir une nouvelle démonstration du théorème de Bourgain cité plus haut.

2. La singularité et non-singularité des types spectraux des rang un

Dans cette section, on développe un certain nombre de critères de singularité et de non-singularité des types spectraux des rang un en utilisant les notions classiques d'affinité et de moyenne géométrique de deux mesures suggérées par le referee. Mais avant de développer ces critères, rappelons ces notions.

Soient μ, μ' deux mesures de probabilité. Choisissons une mesure ρ telle que $\mu << \rho$ et $\mu' << \rho$ (par exemple $\rho = (\mu + \mu')/2$); écrivons $d\mu = g\ d\rho$ et $d\mu' = g'$ $d\rho$. La mesure $\sqrt{gg'}d\rho$ ne dépend pas de ρ: c'est la moyenne géométrique de μ et μ', qu'on peut noter $\sqrt{\mu\mu'}$. L'affinité ou l'intégrale de Hillenger est le nombre $\int d\sqrt{\mu\mu'}$. L'affinité est nulle si et seulement si les mesures sont étrangères; elle vaut 1 si elles sont égales.

PROPOSITION 2.1: *Soient σ et σ' deux types spectraux de deux transformations de rang un faiblement mélangeantes, i.e.*

$$\sigma = \mu + \frac{1}{c}\delta_1 = \omega^* \lim \prod_{l=1}^{N} |P_l|^2\, d\lambda, \quad \sigma' = \mu' + \frac{1}{c}\delta_1 = \omega^* \lim \prod_{l=1}^{N} |P_l'|^2\, d\lambda.$$

Alors les deux assertions suivantes :

(1) $\lim\limits_{\delta\to 0} \limsup \int_{-\delta}^{\delta} \prod\limits_{l=1}^{N} |P_l P_l'| \ d\lambda = 0,$

(2) $\liminf \displaystyle\int_B \prod_{l=1}^{N} |P_l P_l'| \, d\lambda > 0,$ *pour un certain borélien B,*

entraînent que μ et μ' ne sont pas singulières.

Preuve de la proposition: Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\int \prod_{l=1}^{N} |P_l P_l'| \, d\lambda \leq 1.$$

On peut alors extraire une sous-suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\prod_{l=1}^{N_k} |P_l P_l'| \, d\lambda$ converge faiblement vers une certaine mesure positive α continue en 0, l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne aussi que pour toute fonction continue ϕ

$$\begin{aligned} \left| \int \phi \prod_{l=1}^{N} |P_l P_l'| \, d\lambda \right| &\leq \left(\int |\phi|^2 \prod_{l=1}^{N} |P_l|^2 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \prod_{l=1}^{N} |P_l'|^2 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int |\phi|^2 \prod_{l=1}^{N} |P_l|^2 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \int \phi \ d\alpha \right| \leq \left(\int |\phi|^2 \ d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui entraîne que α est absolument continue par rapport à σ (avec une densité L^2). Comme α n'a pas de masse en 0, $\alpha << \mu$. De même, $\alpha << \mu'$.

En fait il est clair que la mesure α est inférieur ou égale à la moyenne géométrique des deux mesures et par (2) on obtient $\alpha(\mathbb{T}) > 0$, d'où le résultat. ∎

PROPOSITION 2.2: *Soit μ le type spectral d'un rang un, i.e.*

$$\mu = \omega^* \lim \prod_{l=1}^{N} |P_l|^2 \, d\lambda,$$

et soit ρ une mesure positive sur le tore. Alors la convergence en mesure (au sens de ρ) de $\prod_{l=1}^{N} |P_l|$ vers 0 implique l'orthogonalité de ρ et μ.

Pour montrer cette proposition on a besoin du lemme suivant.

LEMME 2.1: *Soit μ comme dans la proposition précédente; pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $N > 0$, on a*

$$\mu\left\{\theta : \prod_{l=1}^{N} |P_l| < \varepsilon\right\} < \varepsilon^2.$$

Preuve du lemme: Notons tout d'abord que $\left\{\theta : \prod_{l=1}^{N} |P_l| < \varepsilon\right\}$ est un ouvert d'où par le théorème général de convergence des probabilités dans un espace métrique

$$\begin{aligned}\mu\left\{\theta : \prod_{l=1}^{N} |P_l| < \varepsilon\right\} &\leq \liminf \int_{\left\{\theta : \prod_{l=1}^{N} |P_l| < \varepsilon\right\}} \prod_{l=1}^{M} |P_l|^2 \, d\lambda \\ &= \liminf \int_{\left\{\theta : \prod_{l=1}^{N} |P_l| < \varepsilon\right\}} \prod_{l=1}^{N} |P_l|^2 \prod_{l=N+1}^{M} |P_l|^2 \, d\lambda \\ &< \varepsilon^2. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Preuve de la proposition: Soit $\varepsilon > 0$; à cause de la convergence en mesure au sens de ρ, il existe N_0 tel que

$$\forall N \geq N_0, \quad \rho\left\{\theta : \prod_{l=1}^{N} |P_l| \geq \sqrt{\varepsilon}\right\} < \varepsilon,$$

et par le lemme 2.1 on a $\mu\left\{\theta : \prod_{l=1}^{N} |P_l| < \sqrt{\varepsilon}\right\} < \varepsilon$, i.e. il existe A_ε tel que: $\rho(A_\varepsilon^c) < \varepsilon$ et $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$. D'où la singularité des deux mesures. $\blacksquare$

COROLLAIRE 2.1: *Si* $\int \prod_{l=1}^{N} |P_l P_l'| \, d\lambda \underset{N \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$ *alors* $\mu = \mu'$.

Preuve: La masse de α est inférieure ou égale à l'affinité des deux mesures σ et σ', qui vaut 1 si et seulement si elles sont égales. $\blacksquare$

COROLLAIRE 2.2: $\lambda \perp \mu \Longleftrightarrow \int \prod_{l=1}^{N} |P_l| \, d\lambda \underset{N \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Preuve: Comme λ correspond à $P_n \equiv 1$, pour tout n, le corollaire découle immédiatement des propositions 2.1 et 2.2. $\blacksquare$

3. La singularité mutuelle des types spectraux des transformations d'Ornstein

Le reste de ce travail est basé essentiellement sur la généralisation de la caractérisation de singularité donnée par J. Bourgain dans [B] et qui correspond au corollaire précédent. Cette généralisation se limite, dans notre cas, aux types spectraux ayant les mêmes bases, en clair on obtient la proposition suivante dans le cas des types spectraux des transformations d'Ornstein.

PROPOSITION 3.1: *Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) $\mu \perp \mu'$,

(b) $\int \prod_{l=1}^{N} \left|\frac{P_l}{P'_l}\right| d\mu' \underset{N \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$

La preuve de cette proposition est fondée essentiellement sur le (1) de la proposition suivante.

PROPOSITION 3.2: *Soient μ et μ' les types spectraux réduits associés respectivement aux transformations d'Ornstein T_ω et $T_{\omega'}$. Alors*

(1) *La suite de mesures finies (μ_N) donnée par*

$$\mu_N = \prod_{l=1}^{N} \left|\frac{P_l}{P'_l}\right|^2 d\mu' \tag{3.1}$$

converge faiblement vers μ.

(2) *Les suites de mesures $\left(\left|\frac{P_m}{P'_m}\right|^2 d\mu'\right)$ et $\left(\frac{d\mu'}{|P'_m|^2}\right)$ convergent respectivement vers μ' et σ'.*

Preuve: Clairement μ_N est le type spectral réduit de la transformation d'Ornstein S_N associée au point $\xi_N = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N, \omega'_{N+1}, \omega'_{N+2}, \ldots)$ de Ω. En faisant varier N dans $\mathbb{N}$ on obtient alors une suite de transformations d'Ornstein qui converge faiblement vers T_ω, ce qui entraîne (1). La première partie du (2) se démontre de la même manière que (1), il reste alors à montrer la seconde partie.

En effet, comme

$$\frac{\sigma'}{|P'_m|^2} = \frac{\mu'}{|P'_m|^2} + \frac{1}{c}\frac{1}{p_m}\delta_1$$

où p_m est le paramètre de découpage qui tend vers $+\infty$ quand $m \to +\infty$, il suffit de montrer que la suite $\left(\frac{\sigma'}{|P'_m|^2}\right)_{m>0}$ converge vers σ'.

Notons:

$$d\rho_m = \frac{\sigma'}{|P'_m|^2} = \omega^* \lim_{N\to\infty} \prod_{l<N, l\neq m} |P'_l|^2 \, d\lambda \quad \text{et} \quad d\sigma'_m = \prod_{l=1}^{m-1} |P'_l|^2 \, d\lambda.$$

En remarquant que les polynômes ont des coefficients positifs on obtient que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\overset{\wedge}{\sigma'_m}(k) \leq \overset{\wedge}{\rho_m}(k) \leq \overset{\wedge}{\sigma'}(k)$; comme $\overset{\wedge}{\sigma'_m}(k) \to \overset{\wedge}{\sigma'}(k)$, on a $\overset{\wedge}{\rho_m}(k) \to \overset{\wedge}{\sigma'}(k)$ d'où le résultat. ∎

Preuve de la proposition 3.1: Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\int \prod_{l=1}^{N} \left|\frac{P_l}{P'_l}\right| d\mu' \leq \int \prod_{l=1}^{N} \left|\frac{P_l}{P'_l}\right| d\sigma' \leq 1, \tag{3.2}$$

de plus la borne inférieure de

$$\left(\int f\, d\mu'\right)\left(\int f^{-1} d\mu\right)$$

pris pour les fonctions $f > 0$ continues est le carré de l'affinité de μ et μ'.

D'autre part, le (1) de la proposition 2.1 entraîne très simplement que les deux limites faibles

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{l=1}^{N} \left|\frac{P_l}{P'_l}\right| d\mu' \quad \text{et} \quad \lim_{N\to\infty} \prod_{l=1}^{N} \left|\frac{P'_l}{P_l}\right| d\mu$$

existent et sont égales à la moyenne géométrique $\sqrt{\mu\mu'}$. D'où la proposition.

COROLLAIRE 3.3: *Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(c) $\mu \perp \mu'$ $\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}$-*p.s.*

(d) $\int \prod_{l=1}^{N} \left|\frac{P_l}{P'_l}\right| d\mu'\, d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P} \underset{N\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Preuve: (d) $\Longrightarrow$ (c) découle immédiatement de ce qui précéde .
(c) $\Longrightarrow$ (d) la proposition 3.1 entraîne

$$\lim_{N\longrightarrow+\infty} \int \prod_{l=1}^{N} \left|\frac{P_l}{P'_l}\right| d\mu' = 0 \quad \mathbb{P}\otimes\mathbb{P} - \text{p.s.}$$

D'où le résultat via 3.2 et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. ∎

COROLLAIRE 3.4: $\lambda \perp \mu \quad \mathbb{P} - p.s \Longleftrightarrow \int \prod_{l=1}^{N} |P_l|\, d\lambda\, d\mathbb{P} \underset{N\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Preuve: λ correspond à $P'_l \equiv 1$. ∎

Maintenant, le reste de la démonstration s'inspire largement du travail de J. Bourgain [B].

PROPOSITION 3.3: *Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) $\inf\left\{\left\|\prod_{i=1}^{k}\frac{P_{n_i}}{P'_{n_i}}\right\|_{L^1(\mu')} : k\in\mathbb{N}, n_1<n_2<n_3<\ldots<n_k\right\}=0.$

(2) $\mu\perp\mu'$.

Preuve: Posons $\mathcal{N}=\{n_1,n_2,\ldots,n_k\}$ et soit $N\geq n_k$, alors par Cauchy-Schwarz on a

$$\int\prod_{l=1}^{N}\left|\frac{P_l}{P'_l}\right|d\mu'=\int\sqrt{\prod_{\substack{l\in\mathcal{N}\\ l\leq N}}\left|\frac{P_l}{P'_l}\right|}\sqrt{\prod_{\substack{l\in\mathcal{N}\\ l\leq N}}\left|\frac{P_l}{P'_l}\right|\prod_{\substack{l\notin\mathcal{N}\\ l\leq N}}\left|\frac{P_l}{P'_l}\right|}d\mu'$$

$$\leq\left(\int\prod_{\substack{l\in\mathcal{N}\\ l\leq N}}\left|\frac{P_l}{P'_l}\right|d\mu'\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\prod_{\substack{l\in\mathcal{N}\\ l\leq N}}\left|\frac{P_l}{P'_l}\right|\prod_{\substack{l\notin\mathcal{N}\\ l\leq N}}\left|\frac{P_l}{P'_l}\right|^2d\mu'\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or

$$\int\prod_{\substack{l\in\mathcal{N}\\ l\leq N}}\left|\frac{P_l}{P'_l}\right|\prod_{\substack{l\notin\mathcal{N}\\ l\leq N}}\left|\frac{P_l}{P'_l}\right|^2d\mu'=\int\prod_{l=1}^{N}\left|\frac{P_l}{P'_l}\right|\prod_{l\notin\mathcal{N}=atopl\leq N}\left|\frac{P_l}{P'_l}\right|d\mu'$$

$$\leq\left(\int\prod_{l=1}^{N}\left|\frac{P_l}{P'_l}\right|^2d\mu'\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\prod_{\substack{l\notin\mathcal{N}\\ l\leq N}}\left|\frac{P_l}{P'_l}\right|^2d\mu'\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais la dernière quantité est inférieure à 1, donc

$$\int\prod_{l=1}^{N}\left|\frac{P_l}{P'_l}\right|d\mu'\leq\left(\int\prod_{\substack{l\in\mathcal{N}\\ l\leq N}}\left|\frac{P_l}{P'_l}\right|d\mu'\right)^{\frac{1}{2}},$$

et cette inégalité permet de conclure via la proposition 3.1. ∎

COROLLAIRE 3.5: *Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) $\inf\left\{\int\prod_{i=1}^{k}\left|\frac{P_{n_i}}{P'_{n_i}}\right|d\mu'\ d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}\text{: } k\in\mathbb{N}, n_1<n_2<n_3<\cdots<n_k\right\}=0.$

(2) $\mu\perp\mu'\ \mathbb{P}\otimes\mathbb{P}-p.s.$

Fixons, maintenant, une certaine sous-suite $\mathcal{N}=\{n_1<n_2<n_3<\cdots<n_k\}$, $k\in\mathbb{N}$, soit $m>n_k$, et posons

$$Q=\prod_{i=1}^{k}\left|\frac{P_{n_i}}{P'_{n_i}}\right|,\quad P=\frac{P_m}{P'_m}.$$

On a alors le lemme suivant.

LEMME 3.2: $\int |Q|\,|P|\; d\mu' d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P} \le \frac{1}{2}\left(\int |Q| + \int |Q|\,|P|^2\right) - \frac{1}{8}\left(\int |Q|\,\left||P|^2 - 1\right|\right)^2.$

Preuve: Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(3.3)\quad \int |Q|\,\left||P|^2-1\right| d\mu' d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P} \le \left(\int |Q|\,||P|-1|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |Q|\,||P|+1|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Or, le deuxième facteur de l'inégalité (3.3) est plus petit que 2. En effet:

$$\left\||Q|^{\frac{1}{2}}\,(|P|+1)\right\|_2 \le \left\||Q|^{\frac{1}{2}}\,|P|\right\|_2 + \left\||Q|^{\frac{1}{2}}\right\|_2 \le (\|Q\,P\|_2\,\|P\|_2)^{\frac{1}{2}} + 1 \le 2.$$

D'autre part, le premier facteur de l' inégalité (3.3) vérifie

$$\int |Q|\,||P|-1|^2 = \int |Q|\,|P|^2 + \int |Q| - 2\int |Q|\,|P|,$$

i.e.

$$\left(\int |Q|\,\left||P|^2-1\right|\right)^2 \le 4\left(\int |Q|\,|P|^2 + \int |Q| - 2\int |Q|\,|P|\right).$$

D'où le lemme. ∎

PROPOSITION 3.4: $\lim_{m\to\infty} \int |Q| \left|\frac{P_m}{P'_m}\right|^2 d\mu' = \int |Q|\, d\mu'.$

Preuve: Considérons la mesure de probabilité suivante

$$\tau = \omega^* \lim_{M\to\infty} \prod_{\substack{l\notin\mathcal{N}\\ l\le M}} |P'_l|^2$$

et constatons qu'on a

$$d\tau = \frac{1}{\prod_{n\in\mathcal{N}} |P'_n|^2} d\sigma' \quad \text{et} \quad d\sigma' = \prod_{l=1}^{n_k} |P'_l|^2\, d\sigma'_{n_k+1},$$

d'où

$$d\tau = \prod_{\substack{n\notin\mathcal{N},\\ n\le n_k}} |P'_n|^2\, d\sigma'_{n_k+1}.$$

On montre comme le (2) de la proposition 3.1 que la suite $\left(\left|\frac{P_m}{P'_m}\right|^2 d\tau\right)_{m\ge 0}$ convergence faiblement vers τ et ceci achève la preuve.

Du lemme et de la proposition 3.8 , on obtient par passage à la limite supérieure la proposition suivante qui permet de choisir convenablement la suite $\mathcal{N}$.

PROPOSITION 3.5:

$$\overline{\lim} \int |Q| \left|\frac{P_m}{P'_m}\right| d\mu' d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P} \le \int |Q| - \frac{1}{8}\left(\underline{\lim} \int |Q| \left|\left|\frac{P_m}{P'_m}\right|^2 - 1\right|\right)^2.$$

Pour conclure ce travail, il suffit d'estimer

$$\int |Q| \left|\left|\frac{P_m}{P'_m}\right|^2 - 1\right| d\mu' d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}.$$

Mais compte tenu du fait que $\left|\left|\frac{P_m}{P'_m}\right|^2 - 1\right|$ s'annule en 1 la quantité précédente est la limite de la suite suivante

$$\int \prod_{j\in\mathcal{N}} |P_j P'_j| \left||P_m|^2 - |P'_m|^2\right| \prod_{\substack{j=1\\ j\notin\mathcal{N}, j\neq m}}^{M} |P'_j|^2 \, d\lambda \, d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}.$$

En fait, le résultat est acquis si on montre la proposition suivante.

PROPOSITION 3.6: *$\underline{\lim} \int |Q| \left|\left|\frac{P_m}{P'_m}\right|^2 - 1\right| d\mu' d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P} \ge K \int |Q| \, d\mu' d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}$, où K est une constante positive absolue.*

La preuve de cette proposition comporte deux étapes qui font l'objet de la section suivante.

4. L'inégalité de Khintchine-Bonami et Noyau de Fejér

4.1 1ÈRE ÉTAPE (L'INÉGALITÉ DE KHINTCHINE-BONAMI).

Fixons d'abord z et m, (ω, ω') vivant dans $\Omega \times \Omega$. Et définissons τ par:

$$\begin{aligned}\tau\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{T}\\ s &\longmapsto z^s.\end{aligned}$$

Alors

$$|P_m|^2 - 1 = \sum_{p\neq q} a_{pq}\tau_p(\omega)\overline{\tau_q}(\omega), \quad \text{où } a_{pq} = \frac{z^{(p-q)(h_m+h_{m-1})}}{p_m}$$

et τ_p est définie par $\tau_p = \tau\circ x_{m,p}$, $x_{m,p}$ étant la $p^{\text{ième}}$ projection de $\Omega_m = X_m^{p_m-1}$ À cause de la définition de $\mathbb{P}$ les variables aléatoires $(\tau_p)_{p=1}^{p_m-1}$sont indépendantes, et afin de les centrer on pose:

$$\tau^\circ = \tau - \frac{1}{h_{m-1}+1}\sum_{s=-\frac{h_{m-1}}{2}}^{\frac{h_{m-1}}{2}} z^s, \quad \text{d'où } \tau_p^\circ = \tau_p - \int \tau \, d\mathbb{P} \tag{4.1}$$

et

$$(4.2)\quad \sum a_{pq}\tau_p\overline{\tau_q} = (\sum a_{pq})\left|\int \tau\right|^2 + \sum a_{pq}(\int \overline{\tau}\tau_p^\circ + \int \tau\overline{\tau_q^\circ}) + \sum a_{pq}\tau_p^\circ\overline{\tau_q^\circ}.$$

Mais comme pour $\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}$ les projections π_1 et π_2 de $\Omega\times\Omega$ dans Ω sont indépen dantes alors pour $\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}$ les variables $\tau_p\circ\pi_1$ et $\tau_p\circ\pi_2$ sont indépendantes. Par suite

$$\begin{aligned}\int \left||P_m|^2 - |P'_m|^2\right| d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P} &= \int \mathbb{E}(\left||P_m|^2 - |P'_m|^2\right|_{|\pi_1}] d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P} \\ (4.3)\qquad &\geq \int \left|\mathbb{E}(|P_m|^2 - |P'_m|^2_{|\pi_1}]\right| d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Et à cause de l'indépendance on obtient par (4.2)

$$\begin{aligned}&\int \left|\mathbb{E}(|P_m|^2 - |P'_m|^2_{|\pi_1}]\right| d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P} \\ (4.3)\qquad &= \int \left|\sum a_{pq}(\int \overline{\tau}\tau_p^\circ + \int \tau\overline{\tau_q^\circ}) + \sum a_{pq}\tau_p^\circ\overline{\tau_q^\circ}\right| d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Maintenant par les mêmes arguments que J. Bourgain, on considère les signes aléatoires $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p_m-1}\} \in \{-1,1\}^{p_m-1}$, et l'espace de probabilité associé

$$Z_m = \Omega_m \times \{-1,1\}^{p_m-1}, \quad \text{où } \Omega_m = \left\{-\frac{h_{m-1}}{2}, \ldots, \frac{h_{m-1}}{2}\right\}^{p_m-1}.$$

Ensuite on considère l'espérance conditionnelle de l'expression suivante

$$\sum a_{pq}\left(\int \overline{\tau}\ \tau_p^\circ + \int \tau\overline{\tau_q^\circ}\right) + \sum a_{pq}\tau_p^\circ\overline{\tau_q^\circ}$$

par rapport à la tribu $\mathcal{B}$ donnée par les $A(I,x)$ où $I\subset\{0,\ldots,p_m-1\}$ et $x\in\Omega_m$ ainsi

$$A(I,x) = \prod_{i\in I}\{x_i\} \times \left\{-\frac{h_{m-1}}{2}, \ldots, \frac{h_{m-1}}{2}\right\}^{|I^c|} \times \{1\}^{|I|} \times \{-1\}^{|I^c|}.$$

En fait I correspond à

$$\varepsilon_i = 1, \quad \forall i\in I \quad \text{et} \quad \varepsilon_i = -1, \quad \forall i\notin I.$$

En d'autre termes, on considère l'espérance conditionnelle par rapport aux variables τ_p pour lesquelles $\varepsilon_p = 1$, on obtient le polynôme suivant de degré deux en ε:

$$(4.5)\quad \sum a_{pq}\left(\frac{1+\varepsilon_p}{2}\int \overline{\tau}\tau_p^\circ + \frac{1+\varepsilon_q}{2}\int \tau\overline{\tau_q^\circ}\right) + \sum a_{pq}\frac{1+\varepsilon_p}{2}\frac{1+\varepsilon_q}{2}\tau_p^\circ\overline{\tau_q^\circ}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\int \Big|\sum a_{pq}\Big(\int \overline{\tau}\tau_p^\circ + \int \tau\overline{\tau_q^\circ}\Big) + \sum a_{pq}\tau_p^\circ\overline{\tau_q^\circ}\Big|\, d\mathbb{P} \\
(4.6)\qquad &= \int\int \mathbb{E}\Big(\Big|\sum a_{pq}\Big(\int \overline{\tau}\tau_p^\circ + \int \tau\overline{\tau_q^\circ}\Big) + \sum a_{pq}\tau_p^\circ\overline{\tau_q^\circ}\Big|_{|\mathcal{B}}\Big] d\mathbb{P}\, d\varepsilon \\
&\geq \int\int \Big|\mathbb{E}\Big(\sum a_{pq}\Big(\int \overline{\tau}\tau_p^\circ + \int \tau\overline{\tau_q^\circ}\Big) + \sum a_{pq}\tau_p^\circ\overline{\tau_q^\circ}{}_{|\mathcal{B}}\Big]\Big|\, d\mathbb{P}\, d\varepsilon.
\end{aligned}$$

Or, par l'inégalité de Khintchine-Bonami* [Bo], il existe une constante positive absolue telle que:

$$\begin{aligned}
&\int\int \Big| \sum a_{pq}\left(\frac{1+\varepsilon_p}{2}\int \overline{\tau}\tau_p^\circ + \frac{1+\varepsilon_q}{2}\int \tau\overline{\tau_q^\circ}\right) \\
&\qquad + \sum a_{pq}\frac{1+\varepsilon_p}{2}\frac{1+\varepsilon_q}{2}\tau_p^\circ\overline{\tau_q^\circ}\Big|\, d\varepsilon\, d\mathbb{P} \\
(4.7)\qquad &\geq K\int \left(\int \Big|\sum a_{pq}\Big(\frac{1+\varepsilon_p}{2}\int \overline{\tau}\tau_p^\circ + \frac{1+\varepsilon_q}{2}\int \tau\overline{\tau_q^\circ}\Big)\right. \\
&\qquad \left. + \sum a_{pq}\frac{1+\varepsilon_p}{2}\frac{1+\varepsilon_q}{2}\tau_p^\circ\overline{\tau_q^\circ}\Big|^2 d\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} d\mathbb{P} \\
&\geq K\int \left(\sum |a_{pq}|^2|\tau_p^\circ|^2|\overline{\tau_q^\circ}|^2\right)^{\frac{1}{2}} d\mathbb{P} \\
&= K\int \left(\sum |a_{pq}|^2|\tau_p^\circ|^2|\overline{\tau_q^\circ}|^2\right)^{\frac{1}{2}} d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
(4.8)\qquad \left(\sum |a_{pq}|^2|\tau_p^\circ|^2|\tau_q^\circ|^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{p_m}\sqrt{\left(\left(\sum |\tau_p^\circ|^2\right)^2 - \sum |\tau_p^\circ|^4\right)} \\
&\geq \frac{1}{p_m}\left(\left(\sum |\tau_p^\circ|^2\right) - \sqrt{\sum |\tau_p^\circ|^4}\right)
\end{aligned}$$

la dernière inégalité résulte du fait que

$$\forall x \geq y \geq 0, \quad \sqrt{x-y} \geq \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

Les inégalités (4.7), (4.8) et (4.3) combinées avec (4.4) entraînent:

$$(4.9)\qquad \int \Big||P_m|^2 - |P'_m|^2\Big|\, d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P} \geq K\,\mathrm{var}(\tau) - \frac{K}{p_m}\int \sqrt{\sum |\tau_p^\circ|^4}\, d\mathbb{P}.$$

---

* On peut étendre cette inégalité sans peine aux suites de variables aléatoires réelles, indépendantes, de moyenne nulle et bornées par la même constante.

Mais le dernier terme du deuxième membre de l'inégalité précédente vérifie

$$\frac{1}{p_m}\sqrt{\sum_{p=0}^{p_m-1}|\tau_p^\circ|^4} \leq \frac{4}{\sqrt{p_m}} \underset{N\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où (4.9) devient

$$\int \left||P_m|^2 - |P'_m|^2\right| d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P} \geq K\left(1 - \frac{1}{(h_{m-1}+1)^2}\left|\sum_{s=0}^{h_{m-1}} z^s\right|^2\right) - \frac{4K}{\sqrt{p_m}}. \tag{4.10}$$

On peut alors multiplier (4.10) par

$$\int \prod_{j\in\mathcal{N}} |P_jP'_j| \prod_{\substack{j=1\\ j\notin\mathcal{N}, j\neq m}}^{M} |P'_j|^2\, d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}$$

puisque les deux expressions ne dépendent pas des mêmes variables et intégrer la quantité obtenue par rapport à la mesure de Lebesgue. Enfin, en faisant tendre M vers $+\infty$ on obtient

$$\int |Q|\left|\left|\frac{P_m}{P'_m}\right|^2 - 1\right| d\mu' d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P} \geq$$

$$K\Big(\int |Q|\frac{d\mu'}{|P'_m|^2}d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P} - \int |Q|\frac{1}{(h_{m-1}+1)^2}\left|\sum_{s=0}^{h_{m-1}} z^s\right|^2\frac{d\mu'}{|P'_m|^2}d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}$$
$$- \frac{4}{\sqrt{p(m)}}\int |Q|\frac{d\sigma'}{|P'_m|^2}d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}\Big).$$

4.2 $2^{\text{éme}}$ ÉTAPE (UNE ESTIMATION AUTOUR DU NOYAU DE FEJÉR).

Il nous reste à estimer la limite de la quantité suivante (quitte à extraire une sous suite):

$$\int |Q|\frac{d\mu'}{|P'_m|^2}d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P} - \int |Q|\left|\frac{1}{k_m}\sum_{s=0}^{k_m-1} z^s\right|^2\frac{d\mu'}{|P'_m|^2}d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P},$$

où $k_m = h_{m-1}+1$.

Mais compte tenu du (2) de la proposition 3.1 le but de cette sous-section est d'estimer

$$\int |Q|\left|\frac{1}{k_m}\sum_{s=0}^{k_m-1} z^s\right|^2\frac{d\mu'}{|P'_m|^2}d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P},$$

en démontrant le lemme suivant.

LEMME 4.3: $\limsup \int |Q| \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 \frac{d\mu'}{|P'_m|^2} d\mathbb{P} \otimes \mathbb{P} \leq \frac{1}{c}$.

Preuve: Posons $\varphi = |Q|$, et constatons tout d'abord qu'on a

$$\forall \delta > 0, \quad \lim_{m \to +\infty} \int_{]-\delta,\delta[^c} \varphi \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 \frac{d\mu'}{|P'_m|^2} = 0. \tag{4.11}$$

En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned} \int_{]-\delta,\delta[^c} \varphi \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right| \frac{d\mu'}{|P'_m|^2} &\leq (\int \varphi^2 \frac{d\mu'}{|P'_m|^2})^{\frac{1}{2}} \left(\int_{]-\delta,\delta[^c} \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 \frac{d\mu'}{|P'_m|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{]-\delta,\delta[^c} \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 \frac{d\mu'}{|P'_m|^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} \int_{]-\delta,\delta[^c} \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 \frac{d\mu'}{|P'_m|^2} &\leq \frac{4}{k_m^2} \times \frac{1}{\left|\sin(\frac{\delta}{2})\right|^2} \times \int \frac{d\mu'}{|P'_m|^2} \\ &\leq \frac{4}{k_m^2} \times \frac{1}{\left|\sin(\frac{\delta}{2})\right|^2}. \end{aligned}$$

Le résultat découle du fait que

$$\frac{4}{k_m^2} \times \frac{1}{\left|\sin(\frac{\delta}{2})\right|^2}$$

converge vers 0 quand m tend vers $+\infty$.

Maintenant compte tenu du fait que φ est une fonction positive et continue en 0, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que: $|\theta| \leq \eta$ implique $|\varphi(\theta) - 1| < \varepsilon$.

On en déduit

$$\left| \int_{-\eta}^{\eta} \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 (\varphi(\theta) - 1) \frac{d\mu'}{|P'_m|^2} \right| < \varepsilon, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

D'où

$$\int_{-\eta}^{\eta} \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 \varphi(\theta) \frac{d\mu'}{|P'_m|^2} < \int_{-\eta}^{\eta} \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 \frac{d\mu'}{|P'_m|^2} + \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
(4.12) \qquad & \leq \int \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 \frac{d\sigma'}{|P'_m|^2} + \varepsilon \\
& \leq \int \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 d\sigma' + \varepsilon \\
& = \left(\int \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 d\mu' + \frac{1}{c} \right) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité résulte du fait que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \overset{\wedge}{\sigma'}(n) \geq \overset{\wedge}{\sigma'_m}(n), \quad \text{où } \sigma'_m = \frac{\sigma'}{|P'_m|^2}.$$

Mais à cause de la continuité de μ' et du fait que $\left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2$ vérifie

$$\text{pour tout } z \neq 1, \quad \lim_{m \to +\infty} \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 = 0;$$

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{T}, \quad \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 \leq 1.$$

On obtient grâce au théorème de la convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{m \to +\infty} \int \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 d\mu' = 0.$$

Ainsi (4.11) et (4.12) entraînent

$$\limsup \int \varphi \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 \frac{d\mu'}{|P'_m|^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \limsup \left(\int_{-\eta}^{\eta} \varphi \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 \frac{d\mu'}{|P'_m|^2} + \int_{[-\eta,\eta]^c} \varphi \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 \frac{d\mu'}{|P'_m|^2} \right) \\
&\leq \limsup \int_{-\eta}^{\eta} \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 \varphi(\theta) \frac{d\mu'}{|P'_m|^2} \\
&\leq \lim \left(\int \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 d\mu' + \frac{1}{c} \right) + \varepsilon = \frac{1}{c} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Et puisque ε est arbitraire on obtient

$$\limsup \int \varphi \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 \frac{d\mu'}{|P'_m|^2} \leq \frac{1}{c}.$$

Maintenant il suffit de constater que si on pose

$$f_m(\omega,\omega') = \int |Q| \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 \frac{d\mu'}{|P'_m|^2}$$

alors on a $f_m(\omega,\omega') \leq 1$, pour tout m. Ainsi, par le lemme de Fatou , on obtient

$$\int \limsup f_m(\omega,\omega')d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P} \geq \limsup \int f_m(\omega,\omega')d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P},$$

i.e.

$$\limsup \int f_m(\omega,\omega')d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P} \leq \frac{1}{c'},$$

ceci achève la preuve du lemme. ∎

Preuve de la proposition 3.10: Le (2) de la proposition 3.1 permet d'écrire

$$\liminf \int |Q| \left| \left| \frac{P_m}{P'_m} \right|^2 - 1 \right| d\mu' d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}$$

$$\geq K\Big(\int |Q|\, d\mu' d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P} + \frac{1}{c} - \limsup \int |Q| \left| \frac{1}{k_m} \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s \right|^2 \frac{d\mu'}{|P'_m|^2} d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P}\Big)$$

et par le lemme 4.1 on obtient

$$\liminf \int |Q| \left| \left| \frac{P_m}{P'_m} \right|^2 - 1 \right| d\mu' d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P} \geq K \int |Q|\, d\mu' d\mathbb{P}\otimes\mathbb{P},$$

ce qui achève la preuve de la proposition. ∎

Preuve du théorème 2: Soit

$$\beta = \inf\left\{ \|Q\|_1 : Q = \prod_{i=1}^{k} \left| \frac{P_{n_i}}{P'_{n_i}} \right| ; k \in \mathbb{N}, n_1 < n_2 < \ldots < n_k \right\}.$$

Pour

$$Q = \prod_{i=1}^{k} \left| \frac{P_{n_i}}{P'_{n_i}} \right|,$$

la proposition 3.10 entraîne

$$\liminf \int |Q| \left| \left| \frac{P_m}{P'_m} \right|^2 - 1 \right| d\mu' d\mathbb{P} \otimes \mathbb{P} \geq K \|Q\|_1 \geq K\beta$$

et par la proposition 3.9 on a

$$\limsup \int |Q| \left| \frac{P_m}{P'_m} \right| d\mu' d\mathbb{P} \otimes \mathbb{P} \leq \|Q\|_1 - \frac{1}{8} K^2 \beta^2,$$

d'où pour $m > n_k$ et par définition de β on obtient

$$\beta \leq \|Q\|_1 - \frac{1}{8} K^2 \beta^2.$$

Ce qui entraîne en prenant l'inf sur les Q que

$$\beta \leq \beta - \frac{1}{8} K^2 \beta^2$$

et ceci entraîne $\beta = 0$. ∎

On cite maintenant un certain nombre de corollaires immédiats.

COROLLAIRE 4.6 (Bourgain): *Presque sûrement au sens de $\mathbb{P}$ les types spectraux des transformations d'Ornstein sont singuliers (par rapport à la mesure de Lebesgue).*

Preuve: Prendre $\mu' = \lambda$, $P'_n \equiv 1$, et constater que la proposition 3.8 reste valable en remplaçant le symbole "lim" par "limsup" et le signe "=" par "$\leq$". ∎

COROLLAIRE 4.7 (Dooley–Eigen): *Si le paramètre de découpage dans la construction des transformations d'Ornstein est 10^n, alors presque sûrement au sens de $\mathbb{P}$ les types spectraux de ces transformations sont singuliers.*

Soient n un entier positif supérieur à 2, $(X_i, \mathcal{A}_i, \nu_i, T_i)_{i=1,\dots,n}$ un famille finie de systèmes dynamiques. On note par $\lambda^{(n)}$ l'élément générique de l'ensemble des couplage de ces n systèmes dynamiques.

COROLLAIRE 4.8: *Soit $n \geq 2$, on a:*

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{P} \left\{ (\omega_i)_{i=1}^n : \lambda^{(n)} = \bigotimes_{i=1}^{n} \nu \right\} = 1.$$

Preuve: Presque sûrement les transformations $(T_{\omega_i})_{i=1,\dots,n}$ ont la propriété d'autocouplage minimal et par le théorème 1 la projection de $\lambda^{(n)}$ sur deux copies de X est nécessairement la mesure produit d'où par [D-Ru], $\lambda^{(n)}$ est la mesure produit. ∎

REMERCIEMENT: Je remercie J-P. Thouvenot qui m'a soumis ce problème. Mes remerciements sont aussi pour F. Parreau qui m'a indiqué le problème de la masse en zéro et avec qui les discussions m'ont été très utiles; ainsi que pour le referee dont les remarques et suggestions ont permis d'améliorer la lisibilité et les démonstrations de cet article.

Références

[B] J. Bourgain, *On the spectral type of Ornstein class one transformations*, Israel Journal of Mathematics **84** (1993), 53–63.

[B-M] G. Brown and W. Moran, *On the orthogonality of Riesz products*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **76** (1974), 173–181.

[Bo] A. Bonami, *Ensembles $\Lambda(p)$ dans le dual de D^∞*, Annales de l'Institut Fourier (Grenoble) **18** (1968), 293–304.

[C-N] J. R. Choksi and M. G. Nadkarni, *The maximal spectral type of a rank one transformation*, Canadian Mathematical Bulletin **37** (1994), 29–36.

[D-E] A. H. Dooley and S. J. Eigen, *Family of generalized Riesz products*, preprint, 1994.

[D-Ru] A. Del Junco and D. Rudolph, *On ergodic actions whose self-joinings are graphs*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **7** (1987), 531–557.

[Fr1] N. A. Friedman, *Introduction to Ergodic Theory*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1970.

[Fr2] N. A. Friedman, *Replication and stacking in ergodic theory*, The American Mathematical Monthly **99** (1992), 31–34.

[K] J. King, *Joining-rank and the structure of finite rank mixing transformations*, Journal d'Analyse Mathématique **51** (1988), 182–227.

[K-Th] J. King and J-P. Thouvenot, *A canonical structure theorem for finite joining-rank maps*, Journal d'Analyse Mathématique **56** (1991), 211–230.

[Kl-Sa] S. J. Kilmer and S. Saeki, *On Riesz Products Measures, mutual absolute continuity and singularity*, Annales de l'Institut Fourier, Grenoble **38** (1988), 63–93.

[Kl] I. Klemes, *The spectral type of the straircase transformations*, Tôhoku Mathematical Journal **48** (1994), 247–258.

[Kl-Re] I. Klemes and K. Reinhold, *Rank one transformations with singular spectral type*, Israel Journal of Mathematics **98** (1997), 1–14.

[O] D. S. Ornstein, *On the root problem in ergodic theory*, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. II, University of California Press, 1967, pp. 347–356.

[P] J. Peyrière, *Étude de quelques propriétés des produits de Riesz*, Annales de l'Institut Fourier (Grenoble) **25** (1975), 127–169.

[Pa] F. Parreau, *Ergodicité et pureté des produits de Riesz*, Annales de l'Institut Fourier **40** (1990), 391–405.

[Ri] G. Ritter, *On Kakutani's theorem for infinite products of not necessarily independent functions*, Mathematische Annalen **239** (1979), 35–53.

[Ru] D. Rudolph, *An Example of a measure-preserving map with minimal self-joining, and applications*, Journal d'Analyse Mathématique **35** (1979), 97–122.

[Ru2] D. J. Rudolph, *Fundamentals of Measurable Dynamics*, Oxford University Press, New York, 1990.

[Th] J-P. Thouvenot, *Some properties and applications of joinings in ergodic theory*, in *Ergodic Theory and its Connections with Harmonic Analysis* (Proceedings of Alexandria Conférence) (K. E. Petersen and I. Salama, eds.), London Mathematical Society Lectures Notes 205, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Th-p] J-P. Thouvenot, Communication privée.